

## 異種材料接合界面近傍の傾斜だ円形き裂の応力拡大係数について\*

野田 尚昭<sup>\*1</sup>, 幸山 崇雄<sup>\*2</sup>, 木下 喜友<sup>\*3</sup>

## Stress Intensity Factors of an Inclined Elliptical Crack near a Bimaterial Interface

Nao-aki NODA<sup>\*4</sup> Takao KOUYAMA and Yositemo KINOSHITA<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,  
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper the stress intensity factors of an inclined elliptical crack near a bimaterial interface are discussed. The solution utilizes the body force method and requires Green's functions for perfectly bonded semi-infinite bodies. The formulation leads to a system of hypersingular integral equations whose unknowns are three modes of crack opening displacements. In the numerical calculation, unknown body force densities are approximated by using fundamental density functions and polynomials. The results show that the present method yields smooth variations of stress intensity factors along the crack front accurately. Distributions of stress intensity factors are indicated in tables and figures with varying the shape of crack, distance from the interface, and elastic constants. It is found that the inclined crack can be approximated by models of vertical and parallel cracks with the error 24% even in the case of very close cracks near an interface.

**Key Words:** Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Elliptical Crack, Singular Integral Equation, Numerical Analysis, Fundamental Density Function

## 1. 緒言

最近, 構造物の高機能性化などを狙いとして材料の複合化, 接合化などの技術が進んでいる. それらの材料の普及及び使用分野の拡大に伴い, 異種接合材, 複合材の界面の強度評価が大きな問題となってくる. 線形破壊力学の確立とともに, 異種材料接合界面近傍のき裂の応力拡大係数に関してもこれまで多くの資料が得られているが, その多くは2次元問題の解析<sup>(1)~(3)</sup>に限定されており, 3次元問題に関してはいくつか研究はあるものの, 利用できる解析<sup>(4)~(10)</sup>は比較的少ない. このような状況を考慮して, 著者らは界面に平行なだ円形き裂と界面に垂直なだ円形き裂の3次元問題を考察した<sup>(11)(12)</sup>.

しかし, 実際のき裂や欠陥は, 界面に対してある角度で傾いて存在するものと考えられるので, それを界面に平行または垂直なモデルとして取り扱う場合の影響を調べる必要があると考えられる. 同種の研究として, 野口ら<sup>(13)</sup>及び小田ら<sup>(14)</sup>は自由表面近傍の3次元傾斜き裂を解析しているが, 本研究ではより一般的に界面からの距離, き裂の形状比, 材料の剛性比, 及び界面に対する傾き角の変化による界面の影響を明らかに

する. また, Lee-Farris-Keer<sup>(7)</sup>は(1)界面上に存在する傾斜だ円形き裂(図1で $h=0$ )および(2)界面近傍に存在する界面に平行なだ円形き裂(図1で $\varphi=90^\circ$ )を考察しているが, 図1の問題( $h=0$ ,  $\varphi=90^\circ$ )は扱っていない. そこで, 本論文では, 界面に対する傾き角を変化させ得られる傾斜だ円形き裂の結果と, それを傾きのない等価だ円形き裂に投影し, それぞれの荷重方向に対し垂直な方向の応力場の厳しさを比較し, 検討する. なお, 著者らのこれまでの一連の研究<sup>(11)(12)(14)~(16)</sup>により, 体積力法の未知関数を基本密度と多項式で近似することによって滑らかで高精度の応力拡大係数の分布が得られることが知られている.

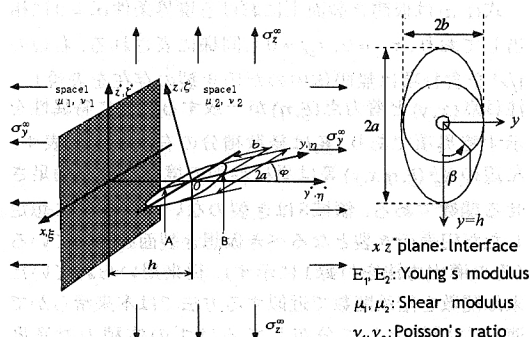


Fig.1 An inclined elliptical crack near a bimaterial interface.  $(x^2/a^2 + (y-h)^2/b^2 = 1)$

\* 原稿受付 2005年1月4日.

<sup>\*1</sup> 正員, 九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).<sup>\*2</sup> 九州工業大学工学部.<sup>\*3</sup> SMC(株)(〒105-0004 東京都港区新橋1-16-4 あさひ銀新橋ビル).

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

## 2. 解析方法

図1に示すように、異材接合無限体中の異材界面に傾いて存在するだ円き裂に遠方で引張を受ける場合の応力拡大係数の解析を行う。材料1に角度 $\varphi$ 傾いた、だ円形き裂 $x^2/a^2 + (y-h)^2/b^2 = 1$ が存在するものとする。このとき体積力法の考え方によれば、問題はき裂の存在しない無限体中においてき裂となるべき仮想境界上に分布された $z$ 方向の引張の標準型体積力対<sup>(17)</sup>の密度 $f_{zz}(\xi, \eta)$ 、 $yz$ 方向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$ 、 $zx$ 方向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{zx}(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分で表現される。ここで、 $(\xi, \eta, \zeta)$ は着力点の $(x, y, z)$ 座標である。また $E_1, \nu_1$ は材料1の弾性定数である。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} \left[ \iint_S \frac{f_{zz}(\xi, \eta)}{r_1^3} d\xi d\eta \right. \\ & + \iint_S K_z^{\prime\prime}(\xi, \eta, x, y, \varphi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \iint_S K_z^{\prime\prime}(\xi, \eta, x, y, \varphi) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. \left. + \iint_S K_z^{\prime\prime}(\xi, \eta, x, y) f_{xx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = -(\sigma_z^{\infty} \cos^2 \varphi + \sigma_y^{\infty} \sin^2 \varphi) \right] \quad (1 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & y = y' / \cos \varphi, \quad z = z' / \cos \varphi, \\ & r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y'-\eta')^2 + (z'-\zeta')^2}, \\ & S = \{(\xi, \eta) | (\xi/a)^2 + \{(\eta-h)/b\}^2 \leq 1\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned} U_z(x, y) &= u_z(x, y, 0) - u_z(x, y, -0) \\ &= \frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1(1-\nu_1)} f_{zz}(x, y), \\ U_y(x, y) &= u_y(x, y, 0) - u_y(x, y, -0) \\ &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} f_{yz}(x, y), \\ U_x(x, y) &= u_x(x, y, 0) - u_x(x, y, -0) \\ &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} f_{zx}(x, y). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot c)$$

式(1・a)は仮想き裂面上における境界条件 $\sigma_z = 0$ に相当しており、 $\tau_{yz} = 0$ 、 $\tau_{zx} = 0$ も同様に表される。右辺の $1/r^3$ を含む項は無限体中のだ円き裂の存在を表現し、注目点 $(x, y)$ と着力点 $(\xi, \eta)$ が一致するときに特異性を示す特異項であり、 $\iint_S$ は発散積分の有限部分を表す。左辺の $K_z^{\prime\prime}(\xi, \eta, x, y)$ 等は異材界面の境界条件を満足させる関数である。領域 $S$ はき裂のない無限体中に想定しただ円表面き裂となるべき仮想き裂面を表している(その導出方法を付録1に示す)。従来用いられていた未知関数を階段関数で近似する方法では本来滑らかで連続な関数として分布してはすの体積力対密度 $f_{zz}(\xi, \eta)$ 、 $f_{yz}(\xi, \eta)$ 、 $f_{zx}(\xi, \eta)$ が不連続な関数として近似され

ているため応力拡大係数を求める際に外挿しなければならぬことや、応力拡大係数の滑らかな分布を求めることが難しい等の問題があった。そこで、体積力対密度 $f_{zz}(\xi, \eta)$ 、 $f_{yz}(\xi, \eta)$ 、 $f_{zx}(\xi, \eta)$ を以下のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} f_{zz}(\xi, \eta) &= F_{zz}(\xi_a, \eta_b) w_{zz}(\xi_a, \eta_b), \\ f_{yz}(\xi, \eta) &= F_{yz}(\xi_a, \eta_b) w_{yz}(\xi_a, \eta_b), \\ f_{zx}(\xi, \eta) &= F_{zx}(\xi_a, \eta_b) w_{zx}(\xi_a, \eta_b), \\ w_{zz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{4(1-\nu)^2 b \sigma_z^{\infty}}{(1-2\nu)E(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2}, \\ w_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{yz}^{\infty}}{C(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2}, \\ w_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{zx}^{\infty}}{B(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2}, \\ B(k) &= (k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k), \\ C(k) &= (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k), \\ k' &= b/a \leq 1, \quad k = \sqrt{1-(b/a)^2}, \quad \xi_a = \xi/a, \quad \eta_b = \eta/b, \\ K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}}, \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで $w_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ 、 $w_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ 、 $w_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は、基本密度関数と呼ばれ、無限体中の $xy$ 平面上にあるだ円き裂の遠方で、それぞれ $\sigma_z^{\infty}$ 、 $\tau_{yz}^{\infty}$ 、 $\tau_{zx}^{\infty}$ が作用したときの、だ円き裂の応力場を厳密に表現する体積力密度に相当する(実際の数値計算では $\sigma_z^{\infty} = \tau_{yz}^{\infty} = \tau_{zx}^{\infty} = 1$ とおく)。また、 $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ 、 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ 、 $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は重み関数で以下のように近似する。ここで $(\xi_a, \eta_b)$ は、き裂の中心からの $(x, y)$ 座標の距離を表している。

$$\left. \begin{aligned} F_{zz}(\xi_a, \eta_b) &= \alpha_0 \xi_a^0 \eta_b^0 + \alpha_1 \xi_a^1 \eta_b^1 + \dots + \alpha_{n-1} \xi_a^{n-1} \eta_b^{n-1} + \alpha_n \xi_a^n \eta_b^n \\ &+ \alpha_{n+1} \xi_a^{n+1} \eta_b^{n+1} + \alpha_{n+2} \xi_a^{n+2} \eta_b^{n+2} + \dots + \alpha_{2n-1} \xi_a^{2n-1} \eta_b^{2n-1} \\ &+ \alpha_n \xi_a^{2n} \\ &= \sum_{l=0}^n \alpha_l G_l(\xi_a, \eta_b), \\ F_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \beta_0 \xi_a^0 \eta_b^0 + \beta_1 \xi_a^1 \eta_b^1 + \dots + \beta_{n-1} \xi_a^{n-1} \eta_b^{n-1} + \beta_n \xi_a^n \eta_b^n \\ &+ \beta_{n+1} \xi_a^{n+1} \eta_b^{n+1} + \beta_{n+2} \xi_a^{n+2} \eta_b^{n+2} + \dots + \beta_{2n-1} \xi_a^{2n-1} \eta_b^{2n-1} \\ &+ \beta_n \xi_a^{2n} \\ &= \sum_{l=0}^n \beta_l G_l(\xi_a, \eta_b), \\ F_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \gamma_0 \xi_a^0 \eta_b^0 + \gamma_1 \xi_a^1 \eta_b^1 + \dots + \gamma_{n-1} \xi_a^{n-1} \eta_b^{n-1} + \gamma_n \xi_a^n \eta_b^n \\ &+ \gamma_{n+1} \xi_a^{n+1} \eta_b^{n+1} + \gamma_{n+2} \xi_a^{n+2} \eta_b^{n+2} + \dots + \gamma_{2n-1} \xi_a^{2n-1} \eta_b^{2n-1} \\ &+ \gamma_n \xi_a^{2n+1} \eta_b^0 \\ &= \sum_{l=0}^n \gamma_l Q_l(\xi_a, \eta_b), \quad l = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

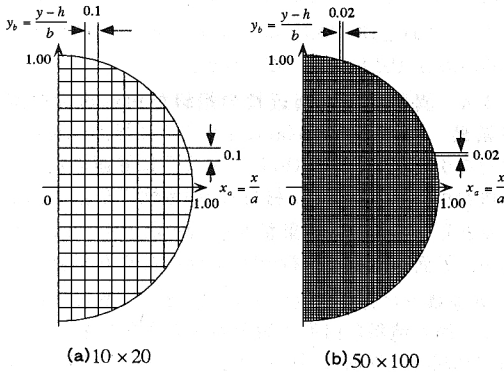


Fig.2 Boundary collocation points.

Table 1 Convergence of the results  $F_{II}$ ,  $F_{III}$ ,  $F_{IB}$ ,  $F_{IM}$  when  $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty, \beta = \pi/2, 3\pi/2, v_1, v_2 = 0.3$ , and Number of collocation points  $10 \times 20$  (see Fig.2(a)).  
(a)  $\varphi = 15^\circ$

| h/b | n  | $F_{II}$          |                        |                   |                        | $F_{III}$         |                        |                   |                        | $F_{IB}$          |                        |                   |                        | $F_{IM}$          |                        |                   |                        |
|-----|----|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
|     |    | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ |
| 1.2 | 8  | 0.9677            | 0.5488                 | 0.2853            | 0.1357                 | 0.9358            | 0.4672                 | 0.2020            | 0.1899                 | 0.9680            | 0.5483                 | 0.2853            | 0.1352                 | 0.9354            | 0.4676                 | 0.2020            | 0.1896                 |
|     | 9  | 0.9680            | 0.5483                 | 0.2853            | 0.1352                 | 0.9354            | 0.4676                 | 0.2020            | 0.1896                 | 0.9685            | 0.5398                 | 0.2854            | 0.1349                 | 0.9357            | 0.4674                 | 0.2021            | 0.1897                 |
|     | 10 | 0.9685            | 0.5398                 | 0.2854            | 0.1349                 | 0.9357            | 0.4674                 | 0.2021            | 0.1897                 | 0.8740            | 0.6351                 | 0.2494            | 0.1408                 | 0.8596            | 0.5955                 | 0.2047            | 0.1985                 |
| 1.4 | 8  | 0.8740            | 0.6351                 | 0.2494            | 0.1408                 | 0.8596            | 0.5955                 | 0.2047            | 0.1985                 | 0.8741            | 0.6350                 | 0.2493            | 0.1408                 | 0.8596            | 0.5956                 | 0.2047            | 0.1985                 |
|     | 9  | 0.8741            | 0.6350                 | 0.2493            | 0.1408                 | 0.8596            | 0.5956                 | 0.2047            | 0.1985                 | 0.8741            | 0.6350                 | 0.2494            | 0.1408                 | 0.8596            | 0.5956                 | 0.2047            | 0.1985                 |
|     | 10 | 0.8741            | 0.6350                 | 0.2494            | 0.1408                 | 0.8596            | 0.5956                 | 0.2047            | 0.1985                 | 0.8010            | 0.7243                 | 0.2277            | 0.2034                 | 0.7972            | 0.7165                 | 0.2136            | 0.2421                 |
| 2.0 | 8  | 0.8010            | 0.7243                 | 0.2277            | 0.2034                 | 0.7972            | 0.7165                 | 0.2136            | 0.2421                 | 0.8010            | 0.7243                 | 0.2277            | 0.2034                 | 0.7972            | 0.7165                 | 0.2136            | 0.2421                 |
|     | 9  | 0.8010            | 0.7243                 | 0.2277            | 0.2034                 | 0.7972            | 0.7165                 | 0.2136            | 0.2421                 | 0.8010            | 0.7243                 | 0.2277            | 0.2034                 | 0.7972            | 0.7165                 | 0.2136            | 0.2421                 |
|     | 10 | 0.8010            | 0.7243                 | 0.2277            | 0.2034                 | 0.7972            | 0.7165                 | 0.2136            | 0.2421                 | 0.8010            | 0.7243                 | 0.2277            | 0.2034                 | 0.7972            | 0.7165                 | 0.2136            | 0.2421                 |

(b)  $\varphi = 75^\circ$ 

| h/b | n  | $F_{II}$          |                        |                   |                        | $F_{III}$         |                        |                   |                        | $F_{IB}$          |                        |                   |                        | $F_{IM}$          |                        |                   |                        |
|-----|----|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
|     |    | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ |
| 1.2 | 8  | 1.0168            | 0.5480                 | -0.2847           | -0.1193                | 0.9826            | 0.5613                 | 0.2931            | 0.1204                 | 1.0171            | 0.5476                 | -0.2848           | -0.1190                | 0.9823            | 0.5616                 | 0.2931            | 0.1203                 |
|     | 9  | 1.0171            | 0.5476                 | -0.2848           | -0.1190                | 0.9823            | 0.5616                 | 0.2931            | 0.1203                 | 1.0174            | 0.5471                 | -0.2848           | -0.1188                | 0.9821            | 0.5616                 | 0.2932            | 0.1203                 |
|     | 10 | 1.0174            | 0.5471                 | -0.2848           | -0.1188                | 0.9821            | 0.5616                 | 0.2932            | 0.1203                 | 0.9511            | 0.6297                 | -0.2624           | -0.1210                | 0.9407            | 0.6354                 | 0.2754            | 0.1296                 |
| 1.4 | 8  | 0.9511            | 0.6297                 | -0.2624           | -0.1210                | 0.9407            | 0.6354                 | 0.2754            | 0.1296                 | 0.9512            | 0.6296                 | -0.2623           | -0.1210                | 0.9407            | 0.6353                 | 0.2754            | 0.1296                 |
|     | 9  | 0.9512            | 0.6296                 | -0.2623           | -0.1210                | 0.9407            | 0.6353                 | 0.2754            | 0.1296                 | 0.9512            | 0.6296                 | -0.2624           | -0.1210                | 0.9406            | 0.6354                 | 0.2754            | 0.1296                 |
|     | 10 | 0.9512            | 0.6296                 | -0.2624           | -0.1210                | 0.9406            | 0.6354                 | 0.2754            | 0.1296                 | 0.8528            | 0.7229                 | -0.2353           | -0.1645                | 0.8482            | 0.7125                 | 0.2486            | 0.1632                 |
| 2.0 | 8  | 0.8528            | 0.7229                 | -0.2353           | -0.1645                | 0.8482            | 0.7125                 | 0.2486            | 0.1632                 | 0.8528            | 0.7229                 | -0.2353           | -0.1645                | 0.8482            | 0.7125                 | 0.2486            | 0.1632                 |
|     | 9  | 0.8528            | 0.7229                 | -0.2353           | -0.1645                | 0.8482            | 0.7125                 | 0.2486            | 0.1632                 | 0.8528            | 0.7229                 | -0.2353           | -0.1645                | 0.8482            | 0.7125                 | 0.2486            | 0.1632                 |
|     | 10 | 0.8528            | 0.7229                 | -0.2353           | -0.1645                | 0.8482            | 0.7125                 | 0.2486            | 0.1632                 | 0.8528            | 0.7229                 | -0.2353           | -0.1645                | 0.8482            | 0.7125                 | 0.2486            | 0.1632                 |

Table 2 Convergence of the results  $F_{II}$ ,  $F_{III}$ ,  $F_{IB}$ ,  $F_{IM}$  when  $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty, \beta = \pi/2, 3\pi/2, v_1, v_2 = 0.3$ , and Number of collocation points  $50 \times 100$  (see Fig.2(b)).  
(a)  $\varphi = 15^\circ$

| h/b  | n  | $F_{II}$          |                        |                   |                        | $F_{III}$         |                        |                   |                        | $F_{IB}$          |                        |                   |                        | $F_{IM}$          |                        |                   |                        |
|------|----|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
|      |    | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ |
| 1.05 | 13 | 1.2346            | 0.4066                 | 0.3022            | 0.0974                 | 1.1235            | 0.3895                 | 0.2543            | 0.1186                 | 1.2350            | 0.4062                 | 0.3021            | 0.0973                 | 1.1234            | 0.3896                 | 0.2544            | 0.1184                 |
|      | 14 | 1.2350            | 0.4062                 | 0.3021            | 0.0973                 | 1.1234            | 0.3896                 | 0.2544            | 0.1184                 | 1.2354            | 0.4059                 | 0.3021            | 0.0972                 | 1.1237            | 0.3899                 | 0.2543            | 0.1185                 |
|      | 15 | 1.2354            | 0.4059                 | 0.3021            | 0.0972                 | 1.1237            | 0.3899                 | 0.2543            | 0.1185                 | 1.1176            | 0.4631                 | 0.2942            | 0.1126                 | 0.9852            | 0.4124                 | 0.2402            | 0.1372                 |
| 1.1  | 13 | 1.1176            | 0.4631                 | 0.2942            | 0.1126                 | 0.9852            | 0.4124                 | 0.2402            | 0.1372                 | 1.1180            | 0.4627                 | 0.2943            | 0.1128                 | 0.9854            | 0.4126                 | 0.2403            | 0.1372                 |
|      | 14 | 1.1180            | 0.4627                 | 0.2943            | 0.1128                 | 0.9854            | 0.4126                 | 0.2403            | 0.1372                 | 1.1182            | 0.4624                 | 0.2942            | 0.1129                 | 0.9855            | 0.4126                 | 0.2403            | 0.1374                 |
|      | 15 | 1.1182            | 0.4624                 | 0.2942            | 0.1129                 | 0.9855            | 0.4126                 | 0.2403            | 0.1374                 | 1.1182            | 0.4624                 | 0.2942            | 0.1129                 | 0.9855            | 0.4126                 | 0.2403            | 0.1374                 |

(b)  $\varphi = 75^\circ$ 

| h/b  | n  | $F_{II}$          |                        |                   |                        | $F_{III}$         |                        |                   |                        | $F_{IB}$          |                        |                   |                        | $F_{IM}$          |                        |                   |                        |
|------|----|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
|      |    | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ | $\mu_2/\mu_1 = 0$ | $\mu_2/\mu_1 = \infty$ |
| 1.05 | 13 | 1.3970            | 0.3768                 | -0.3247           | -0.0873                | 1.1762            | 0.3597                 | 0.3646            | 0.1076                 | 1.3975            | 0.3770                 | -0.3247           | -0.0872                | 1.1765            | 0.3599                 | 0.3645            | 0.1077                 |
|      | 14 | 1.3975            | 0.3770                 | -0.3247           | -0.0872                | 1.1765            | 0.3599                 | 0.3645            | 0.1077                 | 1.3979            | 0.3771                 | -0.3248           | -0.0873                | 1.1767            | 0.3541                 | 0.3645            | 0.1076                 |
|      | 15 | 1.3979            | 0.3771                 | -0.3248           | -0.0873                | 1.1767            | 0.3541                 | 0.3645            | 0.1076                 | 1.1728            | 0.4506                 | -0.3020           | -0.1097                | 1.0038            | 0.4368                 | 0.3397            | 0.1381                 |
| 1.1  | 13 | 1.1728            | 0.4506                 | -0.3020           | -0.1097                | 1.0038            | 0.4368                 | 0.3397            | 0.1381                 | 1.1731            | 0.4509                 | -0.3021           | -0.1098                | 1.0040            | 0.4370                 | 0.3398            | 0.1380                 |
|      | 14 | 1.1731            | 0.4509                 | -0.3021           | -0.1098                | 1.0040            | 0.4370                 | 0.3398            | 0.1380                 | 1.1734            | 0.4512                 | -0.3021           | -0.1098                | 1.0041            | 0.4371                 | 0.3398            | 0.1381                 |
|      | 15 | 1.1734            | 0.4512                 | -0.3021           | -0.1098                | 1.0041            | 0.4371                 | 0.3398            | 0.1381                 | 1.1734            | 0.4512                 | -0.3021           | -0.1098                | 1.0041            | 0.4371                 | 0.3398            | 0.1381                 |

$$\left. \begin{aligned} G_0(\xi_a, \eta_b) &= 1, G_1(\xi_a, \eta_b) = \eta_b, \dots \\ \dots, G_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^2, \dots, G_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2n}, \\ Q_0(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a, Q_1(\xi_a, \eta_b) = \xi_a \eta_b, \dots \\ \dots, Q_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^3, \dots, Q_{-1}(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2n+1} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

き裂の選点の取り方については図2のようにき裂前縁の位置を半径1の円に写像して、 $x_a$  軸、 $y_b$  軸について間隔 0.1, 0.02 のメッシュを切り、その格子点を選点

とした。図2(a)はメッシュの幅0.1でメッシュ数が $10 \times 20$ の例である。図2(b)はメッシュの幅0.02でメッシュ数が $50 \times 100$ の例であり、界面とき裂の距離が近い場合に用いる。また、式(1)に含まれる特異積分の評価については前報<sup>(15)(16)</sup>と同様の解法を用いる。

### 3. 数値計算結果と検討

3.1 応力拡大係数の無次元化表示 以上の理論に基づいて計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ  $n$ 、だ円形内部き裂の傾斜角  $\varphi$  を変化させ、き裂形状比  $a/b = 1, 2, \infty$ 、ポアソン比  $v_1, v_2 = 0.3$  について数値計算を行った。数値積分には二重指数関数型積分公式等のサブルーチンを用いて計算した。また結果として得られた応力拡大係数  $K_I$  をまとめるのに、以下の無次元値  $F_I$  を用いた。

$$\left. \begin{aligned} F_I(\beta) &= \frac{K_I(\beta)}{\sigma_z \sqrt{\pi b}} = \frac{F_{II}}{E(k)} \left[ \sin^2 \beta + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \beta \right]^{1/4} \\ F_{II}(\beta) &= \frac{K_{II}(\beta)}{\sigma_z \sqrt{\pi b}} = \left( F_{II} \frac{k' \cos \beta}{B(k)} + F_{II} \frac{\sin \beta}{C(k)} \right) \frac{k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}, \\ F_{III}(\beta) &= \frac{K_{III}(\beta)}{\sigma_z \sqrt{\pi b}} = \left( -F_{II} \frac{\sin \beta}{B(k)} + F_{II} \frac{k' \cos \beta}{C(k)} \right) \frac{(1 - v)k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

3.2 解の収束性、選点数等の検討 形状比  $a/b = 2$ 、 $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ 、 $v_1, v_2 = 0.3$ 、傾斜角  $\varphi = 15^\circ, 75^\circ$  のき裂について式(3)、(4)の多項式の次数を変化させた時の点 B ( $\beta = \pi/2$ ) と点 A ( $\beta = 3\pi/2$ ) の応力拡大係数  $F_{II}, F_{III}, F_{IB}, F_{IM}$  の収束性を表 1, 2 に示す。表 1 の選点数  $10 \times 20$  の場合、 $\varphi = 15^\circ, 75^\circ$  の場合でも  $h/b \geq 1.2$  で有効数字 4 桁程度収束していることがわかる。表 2 の選点数  $50 \times 100$  の場合、次数を 15 程度まで上げると  $h/b = 1.05$  でも 4 桁程度収束する。表 1, 2 より、以下では  $h/b \geq 1.2$  では次数 10 で  $10 \times 20$  の選点数を用いた。また、 $h/b \leq 1.1$  では次数 15 で  $50 \times 100$  の選点数を用いた。なお、式(3)、(4)の次数  $n$  は、3 桁または、4 桁の収束性が得られるように選んで決めた。

3.3 過去の研究結果との比較 図 3, 4, 5 において形状比  $a/b = 1$ 、剛性比  $\mu_2/\mu_1 = 3$ 、ポアソン比  $v_1, v_2 = 0.3$  で傾斜角  $\varphi = 90^\circ$  の界面に平行なき裂が内圧  $\sigma_z = -p, \tau_{xz} = -p$  を受ける場合について応力拡大係数  $F_I, F_{II}, F_{III}$  の値を Lee らの値<sup>(7)</sup>と比較する。図 3, 4, 5 より Lee らの解析結果が折れ線で表されるのに対し本解析結果では、滑らかな曲線で応力拡大係数の分布が得られている。これは本解析では、式(2)、(3)の多項式によって体積力密度を表現しているためである。図 3 ~ 5 に示すように、 $h/a = C_1$  と  $h/a = -C_1$  ( $C_1$  は正の定数)の結果を比べると、常に応力拡大係数の絶対値は  $h/a = -C_1$  の場合(き裂が剛性の大きな材料中にある場

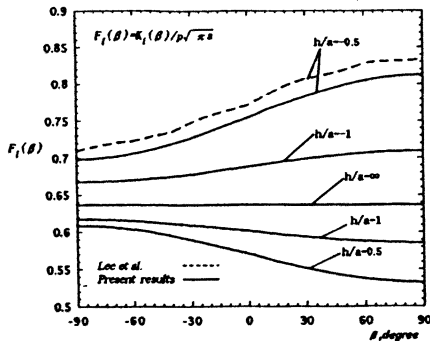


Fig. 3  $K_I$  vs  $\beta$  for parallel,  $\varphi = 90^\circ$ , penny-shaped crack,  $a = b$  under internal shear and normal loading  $\sigma_x = -p, \sigma_z = -p$

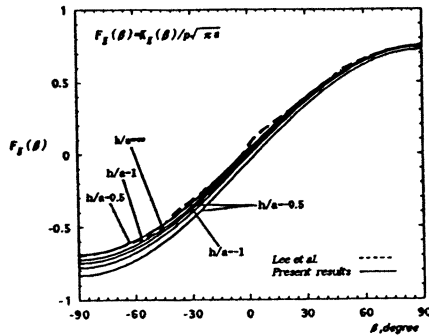


Fig. 4  $K_{II}$  vs  $\beta$  for parallel,  $\varphi = 90^\circ$ , penny-shaped crack,  $a = b$  under internal shear and normal loading  $\sigma_x = -p, \sigma_z = -p$

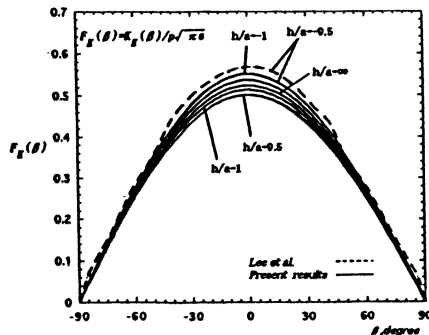
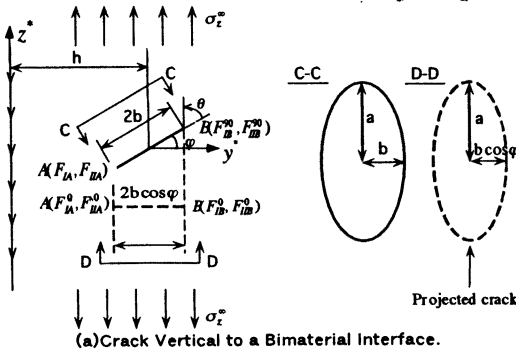


Fig. 5  $K_{III}$  vs  $\beta$  for parallel,  $\varphi = 90^\circ$ , penny-shaped crack,  $a = b$  under internal shear and normal loading  $\sigma_x = -p, \sigma_z = -p$



合)が大きい。しかし、Leeらの図4に相当する $F_{II}$ の結果には、これと逆の傾向が認められ、最大で16%程度の誤差がある(図4の $\beta = 90^\circ$ のとき)。

**3.4 異種接合界面近傍の傾斜だ円形き裂の解析結果** ここでは図6(a)に示すように界面に対して平行な引張りとし、図6(b)に示すように界面に対して垂直な引張りを考える。材料1, 2の剛性比を $\mu_2/\mu_1 = 0$ と $\infty$ として解析した結果を表3～表6に示す。なお、き裂が、界面に対して平行<sup>(11)</sup>および垂直<sup>(12)</sup>な場合には $\mu_2/\mu_1$ を様々に変化させて示した。また、異種材料接合界面近傍の傾斜だ円形き裂を界面に垂直なき裂(図6(a)の破線)と界面に平行なき裂(図6(b)の破線)で置き換えて評価する場合の誤差も検討する。すなわち、以下に示すように、傾斜き裂の最も界面に近い点Aにおいて、最もき裂が伝ばし易いと考えられる荷重と垂直方向の応力場の厳しさを表す尺度 $\hat{F}_A$ を考える<sup>(18)～(20)</sup>。ここで、 $K_A$ と $K_{IIA}$ は点AのモードI, およびモードIIの応力拡大係数である。

$$\hat{K}_A = \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) K_A + \left( \frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) K_{IIA} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\theta = -\varphi, \quad \hat{F}_A = \hat{K}_I / (\sigma_y^* \sqrt{\pi b \cos \varphi}) \text{ in Fig. 10 (a),}$$

$$\theta = \varphi, \quad \hat{F}_A = \hat{K}_I / (\sigma_y^* \sqrt{\pi b \sin \varphi}) \text{ in Fig. 10 (b)}$$

そして $\hat{F}_A$ と、 $xy^*$ 平面に投影したき裂 $[\varphi = 0^\circ$ に相当、寸法 $(a, b \cos \varphi)]$ の $F_A^0$ または、 $xz^*$ 平面に投影したき裂 $[\varphi = 90^\circ$ に相当、寸法 $(a, b \sin \varphi)]$ の $F_A^{90}$ を比較する。

$$F_A^0 = K_A / (\sigma_y^* \sqrt{\pi b \cos \varphi}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$F_A^{90} = K_A / (\sigma_y^* \sqrt{\pi b \sin \varphi})$$

表3～6は剛性比 $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ で、形状比 $a/b = 1, 2, \infty$ の場合に $h/b = 1.05 \sim \infty$ として、 $\beta = 3\pi/2$ の応力拡大係数 $F_A, F_{IIA}$ と $\hat{F}_A, F_A$ をまとめたものである。図7, 8は、界面に対する傾き角、引張り方向を変化させ $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ のとき、 $\hat{F}_A, F_A$ と $h/b$ の関係を示す。表3, 4, 図7は界面に対して平行な引張り、表5, 6, 図8は界面に対して垂直な引張りの場合である。表3～6, 図7, 8より、

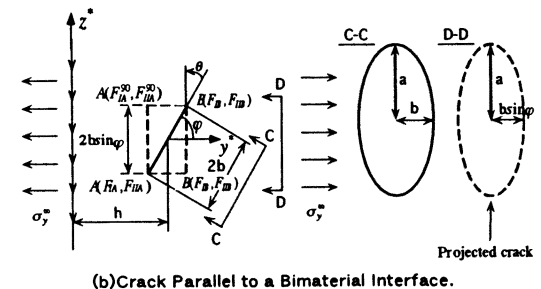


Fig. 6 Crack projected on the plane perpendicular to the tensile stress

Table4 Dimensionless stress intensity factors  $F_{Ia}, F_{IIa}, \hat{F}_{Ia}, \hat{F}_{IIa}, F_{Ia}^0, \hat{F}_{Ia}^0, F_{IIa}^0, \hat{F}_{IIa}^0$  at  $\beta = 3\pi/2$  when  $\varphi = 45^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$  in Fig.1 when  $\sigma^* = \rho, \sigma^* = 0$  (see Fig.6(a)).

| $h/b$    | $a/b$    | $F_{Ia}$ | $F_{IIa}$ | $\hat{F}_{Ia}$ | $\hat{F}_{IIa}$ | $F_{Ia}^0$ | $\hat{F}_{Ia}^0$ | $F_{IIa}^0$ | $\hat{F}_{IIa}^0$ |
|----------|----------|----------|-----------|----------------|-----------------|------------|------------------|-------------|-------------------|
| 1        | 1        | 0.4139   | 0.2533    | 0.5156         | 0.2642          | 0.9890     | 0.5454           | 1.0605      | 0.6095            |
| 1.05     | 2        | 0.6436   | 0.2751    | 0.7149         | 0.2801          | 1.4367     | 0.5844           | 1.1564      | 0.6806            |
| $\infty$ | $\infty$ | 1.1662   | 0.2881    | 0.8749         | 0.2917          | 2.1132     | 0.6101           | 1.7002      | 0.7214            |
| 1.1      | 1        | 0.3471   | 0.2168    | 0.5012         | 0.2787          | 0.9096     | 0.5689           | 0.8224      | 0.6287            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.5666   | 0.2903    | 0.6608         | 0.2960          | 1.3014     | 0.1023           | 0.7056      | 1.1914            |
| 1.2      | 1        | 0.9419   | 0.3085    | 0.8349         | 0.3106          | 1.8562     | 0.6512           | 1.5856      | 0.7472            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.3019   | 0.2855    | 0.4836         | 0.2916          | 0.8667     | 0.6075           | 0.7825      | 0.6584            |
| 1.4      | 1        | 0.4747   | 0.3025    | 0.6316         | 0.3374          | 1.1812     | 0.6769           | 1.0305      | 0.7408            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.7004   | 0.3353    | 0.7813         | 0.3602          | 1.5623     | 0.7342           | 1.3936      | 0.7961            |
| 1.6      | 1        | 0.3134   | 0.2398    | 0.4333         | 0.3371          | 0.7991     | 0.7636           | 0.6890      | 1.0465            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.4564   | 0.3590    | 0.5475         | 0.3728          | 1.0660     | 0.7711           | 0.9516      | 0.7860            |
| 2.0      | 1        | 0.3181   | 0.3034    | 0.4124         | 0.3512          | 0.7789     | 0.6938           | 0.7529      | 0.7044            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.4463   | 0.3822    | 0.5146         | 0.4075          | 1.0182     | 0.8333           | 0.9177      | 0.8168            |
| 2.0      | 2        | 0.4354   | 0.3927    | 0.4832         | 0.4148          | 0.9704     | 0.8516           | 0.9032      | 0.8440            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.5662   | 0.4397    | 0.5557         | 0.4530          | 1.1902     | 0.9402           | 1.0913      | 0.9268            |
| 2.0      | 2        | 0.3183   | 0.3183    | 0.3745         | 0.3745          | 0.7349     | 0.7349           | 0.7404      | 0.7404            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.4129   | 0.4129    | 0.4478         | 0.4478          | 0.9090     | 0.9090           | 0.8892      | 0.8892            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.5000   | 0.5000    | 0.5000         | 0.5000          | 1.0516     | 1.0516           | 1.0000      | 1.0000            |

Table6 Dimensionless stress intensity factors  $F_{Ia}, F_{IIa}, \hat{F}_{Ia}, \hat{F}_{IIa}, F_{Ia}^0, \hat{F}_{Ia}^0, F_{IIa}^0, \hat{F}_{IIa}^0$  at  $\beta = 3\pi/2$  when  $\varphi = 75^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$  in Fig.1 when  $\sigma^* = \rho, \sigma^* = 0$  (see Fig.6(b)).

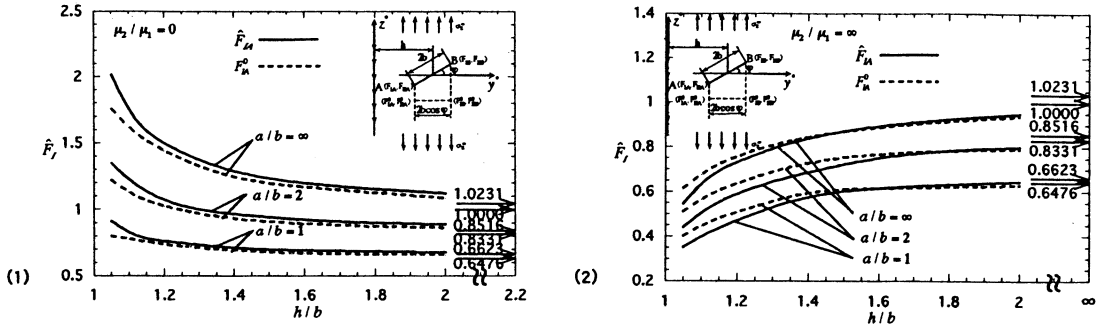
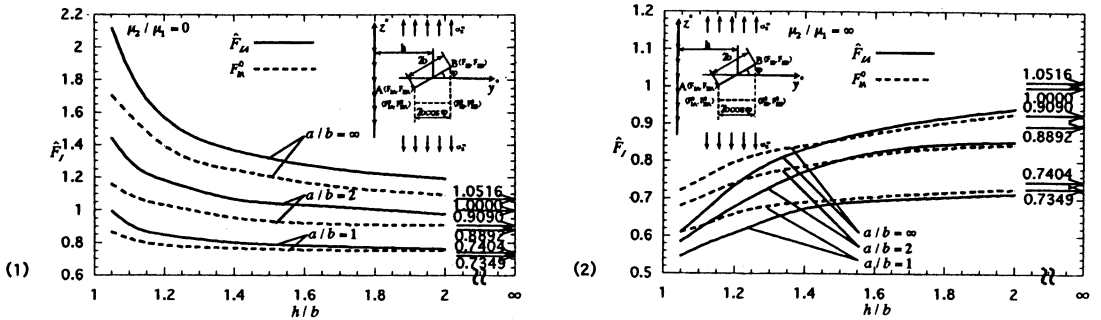
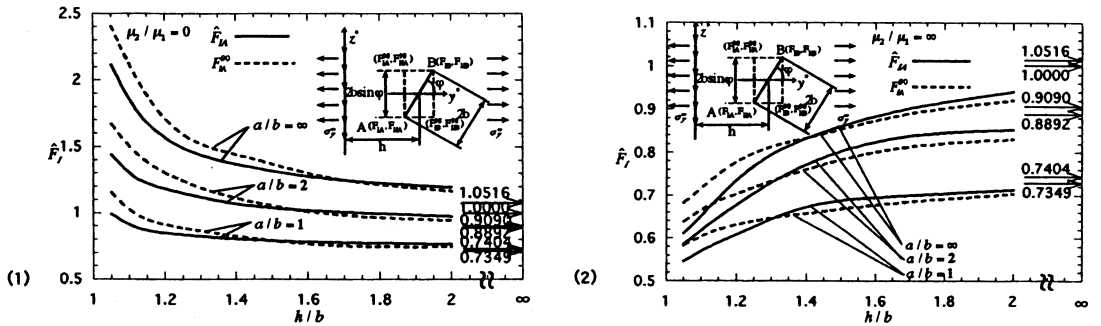
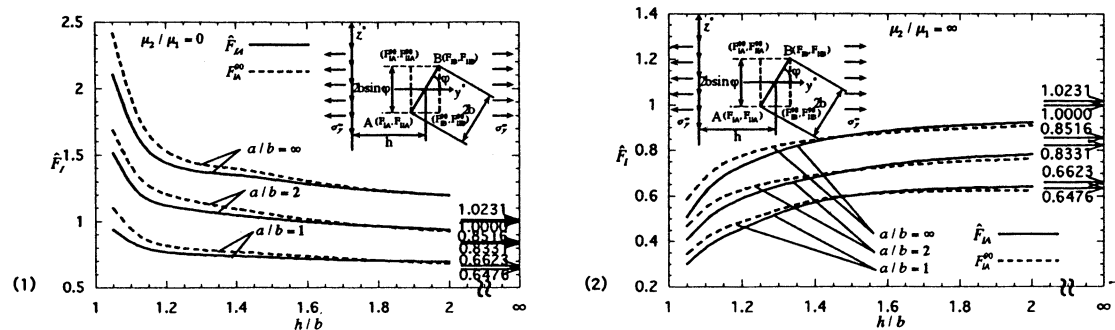
| $h/b$    | $a/b$    | $F_{Ia}$ | $F_{IIa}$ | $\hat{F}_{Ia}$ | $\hat{F}_{IIa}$ | $F_{Ia}^0$ | $\hat{F}_{Ia}^0$ | $F_{IIa}^0$ | $\hat{F}_{IIa}^0$ |
|----------|----------|----------|-----------|----------------|-----------------|------------|------------------|-------------|-------------------|
| 1        | 1        | 0.8464   | 0.2697    | 0.2486         | 0.0834          | 0.9366     | 0.3001           | 1.0998      | 0.3246            |
| 1.05     | 2        | 1.3979   | 0.3771    | 0.3248         | 0.0873          | 1.5134     | 0.4081           | 1.6822      | 0.4484            |
| $\infty$ | $\infty$ | 1.9457   | 0.4695    | 0.4386         | 0.1087          | 2.1011     | 0.5081           | 2.4098      | 0.5642            |
| 1.1      | 1        | 0.7605   | 0.3357    | 0.2286         | 0.0943          | 0.8436     | 0.3698           | 0.9413      | 0.4127            |
| $\infty$ | $\infty$ | 1.1734   | 0.4512    | 0.3021         | 0.1098          | 1.2818     | 0.4904           | 1.4158      | 0.5467            |
| 1.2      | 1        | 0.6891   | 0.4719    | 0.3842         | 0.1196          | 1.7336     | 0.6157           | 1.9315      | 0.6801            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.8174   | 0.5471    | 0.2144         | 0.1068          | 0.7673     | 0.4579           | 0.8154      | 0.4871            |
| 1.4      | 1        | 0.6612   | 0.5211    | 0.2042         | 0.1383          | 0.7356     | 0.5709           | 0.7676      | 0.5793            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.9512   | 0.6296    | 0.2624         | 0.1210          | 1.0460     | 0.6800           | 1.0931      | 0.6895            |
| 1.6      | 1        | 0.6431   | 0.5609    | 0.1983         | 0.1544          | 0.7154     | 0.6166           | 0.7354      | 0.6121            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.9066   | 0.6763    | 0.2490         | 0.1403          | 0.9965     | 0.7358           | 1.0153      | 0.7266            |
| 2.0      | 1        | 0.6224   | 0.5840    | 0.1923         | 0.2054          | 0.7281     | 0.8854           | 0.7304      | 0.8751            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.8528   | 0.7229    | 0.2353         | 0.1645          | 0.9378     | 0.6405           | 0.6775      | 0.6232            |
| 2.0      | 2        | 0.5940   | 0.8440    | 0.2613         | 0.2191          | 1.1979     | 0.9227           | 1.1958      | 0.9076            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.7704   | 0.7704    | 0.2239         | 0.2239          | 0.8516     | 0.8516           | 0.8331      | 0.8331            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.9330   | 0.9330    | 0.2500         | 0.2500          | 1.0231     | 1.0231           | 1.0000      | 1.0000            |

Table3 Dimensionless stress intensity factors  $F_{Ia}, F_{IIa}, \hat{F}_{Ia}, \hat{F}_{IIa}, F_{Ia}^0, \hat{F}_{Ia}^0, F_{IIa}^0, \hat{F}_{IIa}^0$  at  $\beta = 3\pi/2$  when  $\varphi = 15^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$  in Fig.1 when  $\sigma^* = \rho, \sigma^* = 0$  (see Fig.6(a)).

| $h/b$    | $a/b$    | $F_{Ia}$ | $F_{IIa}$ | $\hat{F}_{Ia}$ | $\hat{F}_{IIa}$ | $F_{Ia}^0$ | $\hat{F}_{Ia}^0$ | $F_{IIa}^0$ | $\hat{F}_{IIa}^0$ |
|----------|----------|----------|-----------|----------------|-----------------|------------|------------------|-------------|-------------------|
| 1        | 1        | 0.8151   | 0.3190    | 0.2556         | 0.0926          | 0.9084     | 0.3526           | 0.7952      | 0.4012            |
| 1.05     | 2        | 1.2354   | 0.4059    | 0.3021         | 0.0972          | 1.3433     | 0.4406           | 1.2172      | 0.5102            |
| $\infty$ | $\infty$ | 1.8611   | 0.5056    | 0.4231         | 0.1075          | 2.0112     | 0.5435           | 1.7534      | 0.6146            |
| 1.1      | 1        | 0.7404   | 0.3599    | 0.2301         | 0.1031          | 0.8243     | 0.3923           | 0.7751      | 0.4455            |
| $\infty$ | $\infty$ | 1.1182   | 0.4624    | 0.2942         | 0.1129          | 1.2240     | 0.5027           | 1.1293      | 0.5634            |
| 1.2      | 1        | 0.6760   | 0.4293    | 0.2251         | 0.1135          | 0.7605     | 0.4701           | 0.7262      | 0.5071            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.9605   | 0.5398    | 0.2854         | 0.1349          | 1.0722     | 0.5881           | 1.0436      | 0.6351            |
| 1.4      | 1        | 0.6347   | 0.5240    | 0.2019         | 0.1387          | 0.7084     | 0.5739           | 0.6885      | 0.5919            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.8741   | 0.6350    | 0.2494         | 0.1408          | 0.9644     | 0.6848           | 0.9301      | 0.7254            |
| 1.6      | 1        | 0.6179   | 0.5542    | 0.1943         | 0.1626          | 0.6888     | 0.6132           | 0.6703      | 0.6124            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.8347   | 0.6831    | 0.2365         | 0.1817          | 0.9203     | 0.7487           | 1.0349      | 0.9788            |
| 2.0      | 1        | 0.6046   | 0.5772    | 0.1894         | 0.1785          | 0.6737     | 0.6423           | 0.6585      | 0.6264            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.8010   | 0.7243    | 0.2277         | 0.2034          | 0.8835     | 0.7979           | 0.8588      | 0.7879            |
| 2.0      | 2        | 0.6244   | 0.8621    | 0.2646         | 0.2309          | 1.1114     | 0.9453           | 1.0833      | 0.9339            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.9540   | 0.5940    | 0.1872         | 0.1872          | 0.6623     | 0.5623           | 0.6476      | 0.6476            |
| 2.0      | 2        | 0.7704   | 0.7704    | 0.2239         | 0.2239          | 0.8516     | 0.8516           | 0.8331      | 0.8331            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.9330   | 0.9330    | 0.2500         | 0.2500          | 1.0231     | 1.0231           | 1.0000      | 1.0000            |

Table5 Dimensionless stress intensity factors  $F_{Ia}, F_{IIa}, \hat{F}_{Ia}, \hat{F}_{IIa}, F_{Ia}^0, \hat{F}_{Ia}^0, F_{IIa}^0, \hat{F}_{IIa}^0$  at  $\beta = 3\pi/2$  when  $\varphi = 45^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$  in Fig.1 when  $\sigma^* = \rho, \sigma^* = 0$  (see Fig.6(b)).

| $h/b$    | $a/b$    | $F_{Ia}$ | $F_{IIa}$ | $\hat{F}_{Ia}$ | $\hat{F}_{IIa}$ | $F_{Ia}^0$ | $\hat{F}_{Ia}^0$ | $F_{IIa}^0$ | $\hat{F}_{IIa}^0$ |
|----------|----------|----------|-----------|----------------|-----------------|------------|------------------|-------------|-------------------|
| 1        | 1        | 0.4139   | 0.4024    | 0.5156         | 0.1442          | 0.9890     | 0.5454           | 1.1522      | 0.5821            |
| 1.05     | 2        | 0.6436   | 0.4703    | 0.7149         | 0.1230          | 1.4367     | 0.5844           | 1.6713      | 0.6371            |
| $\infty$ | $\infty$ | 1.1662   | 0.4881    | 0.8749         | 0.1512          | 2.1132     | 0.6101           | 2.4013      | 0.6814            |
| 1.1      | 1        | 0.3471   | 0.3815    | 0.5012         | 0.1871          | 0.9096     | 0.5689           | 1.0226      | 0.6031            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.5666   | 0.4601    | 0.6608         | 0.1594          | 1.3014     | 0.1023           | 0.7056      | 0.8660            |
| 1.2      | 1        | 0.9419   | 0.4209    | 0.8349         | 0.2201          | 1.8562     | 0.6512           | 2.1165      | 0.7162            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.3019   | 0.3780    | 0.4836         | 0.2171          | 0.8667     | 0.6075           | 0.9094      | 0.6301            |
| 1.4      | 1        | 0.4747   | 0.4557    | 0.6316         | 0.2142          | 1.1812     | 0.6769           | 1.3024      | 0.7024            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.7004   | 0.4227    | 0.7813         | 0.2899          | 1.5623     | 0.7342           | 1.7091      | 0.7771            |
| 1.6      | 1        | 0.3134   | 0.3521    | 0.4333         | 0.2934          | 0.7991     | 0.7671           | 0.8204      | 0.6559            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.4564   | 0.4418    | 0.5475         | 0.3061          | 1.0660     | 0.7711           | 1.1097      | 0.7997            |
| 2.0      | 1        | 0.3181   | 0.3361    | 0.4124         | 0.3249          | 0.7789     | 0.6938           | 0.7634      | 0.6569            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.4463   | 0.4267    | 0.5146         | 0.3536          | 1.0182     | 0.8333           | 1.0097      | 0.7597            |
| 2.0      | 2        | 0.5982   | 0.4492    | 0.6141         | 0.3964          | 1.2766     | 0.8832           | 1.2995      | 0.8323            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.3210   | 0.3228    | 0.3931         | 0.3516          | 0.7591     | 0.7124           | 0.7404      | 0.6762            |
| 2.0      | 2        | 0.4354   | 0.4121    | 0.4832         | 0.3991          | 0.9704     | 0.8516           | 0.9397      | 0.7997            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.5163   | 0.4603    | 0.5657         | 0.4364          | 1.1902     | 0.9402           | 1.1629      | 0.8731            |
| 2.0      | 2        | 0.3183   | 0.3183    | 0.3745         | 0.3745          | 0.7349     | 0.7349           | 0.7404      | 0.7404            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.4129   | 0.4129    | 0.4478         | 0.4478          | 0.9090     | 0.9090           | 0.8892      | 0.8892            |
| $\infty$ | $\infty$ | 0.5000   | 0.5000    | 0.5000         | 0.5000          | 1.0516     | 1.0516           | 1.0000      | 1.0000            |

Fig7 (a) Variation of  $\hat{F}_I, F_I^0$  in Fig.1 when (1)  $\mu_2/\mu_1 = 0$ , (2)  $\mu_2/\mu_1 = \infty$  with  $\varphi = 15^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$ .Fig7 (b) Variation of  $\hat{F}_I, F_I^0$  in Fig.1 when (1)  $\mu_2/\mu_1 = 0$ , (2)  $\mu_2/\mu_1 = \infty$  with  $\varphi = 45^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$ .Fig8 (a) Variation of  $\hat{F}_I, F_I^0$  in Fig.1 when (1)  $\mu_2/\mu_1 = 0$ , (2)  $\mu_2/\mu_1 = \infty$  with  $\varphi = 45^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$ .Fig8 (b) Variation of  $\hat{F}_I, F_I^0$  in Fig.1 when (1)  $\mu_2/\mu_1 = 0$ , (2)  $\mu_2/\mu_1 = \infty$  with  $\varphi = 75^\circ, \nu_1, \nu_2 = 0.3$ .

き裂が自由表面に近くなる程、 $\hat{F}_A, F_A$  の差は大きくなるが、計算した範囲内では、き裂の自由表面からの相対距離  $1.05 \leq h/b < 1.2$  で、投影したき裂との差は、界面に対して平行な引張りの場合 24% 程度以下、界面に対して垂直な引張りの場合 15% 程度以下であり、 $h/b \geq 1.2$  では、界面に対して平行な引張りの場合 15% 程度以下、界面に対して垂直な引張りの場合 11% 程度以下である。傾斜角の小さい  $\varphi = 15^\circ, 75^\circ$  では、き裂が表面の極近傍 ( $h/b = 1.05$ ) でも  $F_A$  との差は小さく 15% 以下である。したがって、傾斜内部き裂の荷重方向に対し垂直な方向の応力場の厳しさは、表面に著しく近い場合を除き、投影面積の等しい傾きのないき裂とほぼ等しいと考えてよい。

#### 4. 結 言

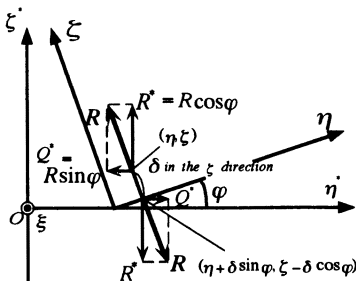
異材接合界面に斜めに存在する 3 次元だ円形き裂 (図 1) を対象として体積力法の特異積分方程式で表現し、界面からの距離、き裂の形状比、材料の剛性比、及び界面に対する傾き角を変化させ、荷重軸方向に投影したき裂と比較して、考察した。その結果、以下のような点が明らかになった。

(1) 傾斜内部き裂の荷重方向に対し垂直な方向の応力場の厳しさは、表面に著しく近い場合を除き、投影面積の等しい傾きのないき裂のそれとほぼ等しい。計算した範囲内では、き裂の異材界面からの相対距離  $1.05 \leq h/b < 1.2$  で、投影したき裂との差は、 $\varphi = 45^\circ$  の場合も含めて 24% 程度以下で、 $h/b \geq 1.2$  では、15% 程度以下である。

(2) 未知関数を基本密度と多項式の積で近似することによってき裂の形状比  $a/b = 1.2, \infty$  で界面との距離  $h/b \geq 1.05$  で有効数字 4 桁程度の収束性 (表 1, 2) が得られた。本解析では未知関数を基本密度関数と多項式で近似しているので、滑らかな応力拡大係数の分布が得られる (図 3 ~ 5)。Lee らの結果<sup>(7)</sup> には最大で 16% 程度の誤差 (図 4 の  $\beta = -90^\circ$ ) が認められる。

#### 付録 1: 式 (1・a) の $K_I^k$ 等の導出方法について

式 (1・a) に含まれる  $K_I^k$  を例とすると、これは異種接



付図 1  $K_I^k$  等の導出方法

合界面近傍に  $z$  方向の引張り型の標準型食違い<sup>(17)</sup> が作用するときの応力  $\sigma_z$  の式であり、それは異種接合界面近傍に作用する集中力による応力の式を微分し組み合わせることによって表現できる。すなわち付図 1 において  $(\xi, \eta, \zeta)$  方向の力を  $(P, Q, R)$  とすれば<sup>(17)</sup>,

$$K_I^k = \frac{\partial \sigma_z^R}{\partial \zeta} \bigg|_{R=1} + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial \sigma_z^Q}{\partial \eta} \bigg|_{Q=1} + \frac{\partial \sigma_z^P}{\partial \xi} \bigg|_{P=1} \right) \dots \dots \dots (A1)$$

ここで、 $\frac{\partial \sigma_z^R}{\partial \zeta}$  を例として、これを  $(\xi, \eta^*, \zeta^*)$  方向の力  $(P, Q^*, R^*)$  による応力の式より導く。

$$\Delta \sigma_z^{R^*} = R \cos \varphi \sigma_z^{R^*} (\eta^*, \zeta^*, z^*) \bigg|_{R^*=1} \dots \dots \dots (A2)$$

$$- R \cos \varphi \sigma_z^{R^*} (\eta^* + \delta \sin \varphi, \zeta^* - \delta \cos \varphi, y^*, z^*) \bigg|_{R^*=1}$$

$$\Delta \sigma_z^{Q^*} = -R \sin \varphi \sigma_z^{Q^*} (\eta, \zeta, y, z) \bigg|_{Q^*=1} \dots \dots \dots (A3)$$

$$+ R \sin \varphi \sigma_z^{Q^*} (\eta + \delta \sin \varphi, \zeta - \delta \cos \varphi, y, z) \bigg|_{Q^*=1}$$

$$\frac{\partial \sigma_z^R}{\partial \zeta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \sigma_z^{R^*} + \Delta \sigma_z^{Q^*}}{\delta} \right)$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_z^{R^*}}{\partial \zeta} \bigg|_{R^*=1} \cos \varphi - \frac{\partial \sigma_z^{R^*}}{\partial \zeta} \bigg|_{R^*=1} \sin \varphi \right) \cos \varphi$$

$$+ \left( \frac{\partial \sigma_z^{Q^*}}{\partial \zeta} \bigg|_{Q^*=1} \cos \varphi - \frac{\partial \sigma_z^{Q^*}}{\partial \eta} \bigg|_{Q^*=1} \sin \varphi \right) \cos \varphi \dots \dots \dots (A4)$$

このようにして、

$$K_I^k = \left( \cos^2 \varphi + \frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \varphi \right) \frac{\partial \sigma_z^R}{\partial \zeta} \bigg|_{R=1} + (\sin \varphi \cos \varphi) \left( -1 + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial \sigma_z^R}{\partial \eta} \bigg|_{R=1} \\ + (\sin \varphi \cos \varphi) \left( -1 + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial \sigma_z^Q}{\partial \zeta} \bigg|_{Q=1} + \left( \sin^2 \varphi + \frac{\nu}{1-\nu} \cos^2 \varphi \right) \frac{\partial \sigma_z^Q}{\partial \eta} \bigg|_{Q=1} \\ + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \sigma_z^P}{\partial \xi} \bigg|_{P=1} \dots \dots \dots (A5)$$

ここで、 $\frac{\partial \sigma_z^R}{\partial \zeta}$  等は文献<sup>(20), (21)</sup> の式を微分することによって導くことができる。ここで、添字  $ij$  は  $(x, y^*, z^*)$  座標の応力を意味するが、応力の座標変換によって  $(x, y, z)$  座標の応力に変換できる。

#### 付録 2: き裂の進展する角度について

異種接合界面近傍のだ円形き裂が進展する角度  $\theta_0$  (付表 1) を  $\sigma_\theta$  の最大値が生じる条件<sup>(22)</sup> から求めると付表 1 のようになる。これらの値より、界面に平行な引張り、界面に垂直な引張りにおいて傾斜だ円形き裂が、荷重軸とほぼ垂直方向に進展していくものと考えられる。

#### 文 献

- (1) Erdogan, F. and Aksogan, O., Bonded Half Planes Containing an Arbitrarily Oriented Crack, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 10, (1974), pp. 569-585.
- (2) Cook, T. S. and Erdogan, F., Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface, *International Journal Engineering of Science*, Vol. 10, (1972), pp. 677-97.

Table A1. Probable angle  $\theta_0$  of crack propagation.  $K_{II}(1-3\cos\theta_0) - K_I\sin\theta_0 = 0$ ,  $3K_{II}\sin\theta_0 - K_I\cos\theta_0 < 0$ .

| $\varphi$            | h/b  | a/b=1           |                      | a/b=2           |                      | a/b=∞           |                      |  |
|----------------------|------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|--|
|                      |      | $\mu_1/\mu_2=0$ | $\mu_1/\mu_2=\infty$ | $\mu_1/\mu_2=0$ | $\mu_1/\mu_2=\infty$ | $\mu_1/\mu_2=0$ | $\mu_1/\mu_2=\infty$ |  |
|                      |      | $\mu_1/\mu_2=0$ | $\mu_1/\mu_2=\infty$ | $\mu_1/\mu_2=0$ | $\mu_1/\mu_2=\infty$ | $\mu_1/\mu_2=0$ | $\mu_1/\mu_2=\infty$ |  |
| $\varphi = 15^\circ$ | 1.05 | -30.0           | -28.4                | -24.8           | -24.5                | -23.4           | -22.2                |  |
|                      | 1.1  | -29.9           | -28.1                | -26.4           | -24.9                | -24.3           | -21.6                |  |
|                      | 1.2  | -31.3           | -26.5                | -28.7           | -25.3                | -26.5           | -22.5                |  |
|                      | 1.4  | -30.4           | -26.5                | -28.0           | -23.0                | -26.0           | -25.3                |  |
|                      | 1.6  | -30.1           | -28.6                | -27.9           | -26.6                | -25.9           | -26.2                |  |
|                      | 2.0  | -30.0           | -29.8                | -28.0           | -27.7                | -26.0           | -26.7                |  |
|                      | ∞    | -30.2           | -30.2                | -28.4           | -28.4                | -26.7           | -26.7                |  |
| $\varphi = 45^\circ$ | 1.05 | -56.2           | -53.8                | -54.6           | -53.4                | -57.0           | -53.3                |  |
|                      | 1.1  | -58.0           | -53.2                | -55.4           | -53.4                | -51.2           | -53.2                |  |
|                      | 1.2  | -59.2           | -53.5                | -57.1           | -54.7                | -54.7           | -54.2                |  |
|                      | 1.4  | -57.5           | -54.9                | -55.7           | -53.7                | -53.9           | -54.5                |  |
|                      | 1.6  | -56.7           | -55.3                | -55.2           | -54.1                | -53.5           | -54.1                |  |
|                      | 2.0  | -56.0           | -55.3                | -54.7           | -54.0                | -53.1           | -53.6                |  |
|                      | ∞    | -55.5           | -55.5                | -54.3           | -54.3                | -53.1           | -53.1                |  |
| $\varphi = 45^\circ$ | 1.05 | 56.2            | 53.8                 | 54.6            | 53.4                 | 57.0            | 53.3                 |  |
|                      | 1.1  | 58.0            | 53.2                 | 55.4            | 53.4                 | 51.2            | 53.2                 |  |
|                      | 1.2  | 59.2            | 53.5                 | 57.1            | 54.7                 | 54.7            | 54.2                 |  |
|                      | 1.4  | 57.5            | 54.9                 | 55.7            | 53.7                 | 53.9            | 54.5                 |  |
|                      | 1.6  | 56.7            | 55.3                 | 55.2            | 54.1                 | 53.5            | 54.1                 |  |
|                      | 2.0  | 56.0            | 55.3                 | 54.7            | 54.0                 | 53.1            | 53.6                 |  |
|                      | ∞    | 55.5            | 55.5                 | 54.3            | 54.3                 | 53.1            | 53.1                 |  |
| $\varphi = 75^\circ$ | 1.05 | 28.3            | 29.7                 | 23.8            | 23.8                 | 23.3            | 23.8                 |  |
|                      | 1.1  | 29.1            | 27.7                 | 25.9            | 24.8                 | 24.6            | 21.8                 |  |
|                      | 1.2  | 29.9            | 25.7                 | 27.6            | 22.6                 | 26.8            | 21.2                 |  |
|                      | 1.4  | 29.7            | 26.5                 | 27.3            | 20.4                 | 24.2            | 24.6                 |  |
|                      | 1.6  | 29.7            | 27.3                 | 27.3            | 21.7                 | 24.2            | 25.6                 |  |
|                      | 2.0  | 29.7            | 26.8                 | 27.3            | 23.5                 | 24.2            | 26.1                 |  |
|                      | ∞    | 30.2            | 30.2                 | 28.4            | 28.4                 | 26.7            | 26.7                 |  |

- (3) M. Isida, and H. Noguchi, An Arbitrary Array of Aracks in Bonded Semi-Infinite Bodies under in-Plane Loads, *Transaction Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 49, No. 437, (1983), pp. 36-45 (in Japanese).
- (4) Willis, J. R., The Penny-Shaped Crack on an Interface, *the Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, Vol. 25, (1972), pp. 367-385.
- (5) Erdogan, F., and Arin, K., Penny-Shaped Interface Crack Between an Elastic Layer and a Half-Space, *International Journal of Solids Structure*, Vol. 8, (1972), pp. 93-109.
- (6) Kassir, M. K., and Bregman, A. M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack Between Two Dissimilar Materials, *the American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, (1972), pp. 308-301.
- (7) Lee, J. C., Farris, T. N., and Keer, L. M., Stress Intensity Factors for Cracks of Arbitrary Shape near an Interfacial Boundary, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, No. 1, (1987), pp. 27-41.
- (8) Shibuya, T., Koizumi, T., and Iwamoto, T., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bounded Half-Spaces, *the Japan Society of Mechanical Engineers International Journal*, Vol. 32, (1989), pp. 485-491.
- (9) Nakamura, T., Three-Dimensional Stress Fields of Elastic Interfaces Cracks, *the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, (1991), pp. 939-946.
- (10) Yuuki, R., and Xu, J. Q., A BEM Analysis of a Three-Dimensional Interfacial Crack of Bimaterials, *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 58, No. 545, (1992), pp. 39-46 (in Japanese).
- (11) Noda, N. A., Ohzono, R., and Chen, M. C., Analysis of an Elliptical Crack Parallel to a Bimaterial Interface under Tension, *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 68, No. 674, (2002), pp. 1453-1459.
- (12) Noda, N. A., Fujimoto, S., Shimamoto, Y., and Kagita, M., Analysis of an Elliptical Crack Vertical to a Bimaterial Interface under Tension, *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 69, No. 688, (2003), pp. 1665-1671.
- (13) Noguchi, H., Ishida, M., and Tsuru, H., New Method of Analysis of Three-Dimensional Crack Problems (2nd Report, Application to Semi-Infinite Body Problems with an Arbitrary Surface or Internal

- Crack under Complex Loading Conditions), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 59, No. 561, (1993), pp. 1279-1286 (in Japanese).
- (14) Oda, K., Muraoka, Y., and Noda, N. A., Analysis of an Elliptical Internal Crack near Free Surface Using Singular Integral Equation of the Body Force Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 67, No. 664, (2001), pp. 2025-2031 (in Japanese).
- (15) Noda, N. A., and Miyoshi, S., Analysis of Variation of Stress Intensity Factor along Crack Front of Semi-Elliptical Surface Crack using Singular Integral Equation Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 61, No. 586, (1995), pp. 1232-1240 (in Japanese).
- (16) Noda, N. A., Kobayashi, K., and Miyoshi, S., Analysis of an Elliptical Crack Vertical of Stress Intensity Factor of Oblique Semi-Elliptical Surface Crack Using Singular Integral Equation Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 63, No. 615, (1997), pp. 2345-2350 (in Japanese).
- (17) Nisitani, H., and Chen, D. H., *The Body Force Method*, (1987), pp. 39-66 (in Japanese).
- (18) Kageyama, K., and Okamura, H., Elastic Analysis for an Infinitesimal Kinked Crack under Tension and in-Plane Shear and fracture criterion Based on Maximum Strain Energy Release Rate, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 48, No. 430, (1982), pp. 783-791 (in Japanese).
- (19) Nisitani, H., Chen, D. H., and Ishida, M., Evaluation for Mixed Mode Stress Intensity Factors of Several Types of Cracks Emanating from an Elliptical Hole, *Transactions of the Japan Society Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 50, No. 451, (1984), pp. 341-350 (in Japanese).
- (20) Noda, N. A., Oda, K., and Ishii, K., Analysis of Intensity Factors for Curved Cracks, *Transactions of the Japan Society Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 59, No. 558, (1993), pp. 332-336.
- (21) Chen, M. C., and Noda, N. A., Force at a Point in the Interior of One of Two Jointed Semi-Infinite Solids, *Kikai no Kenkyu (Science of Machine)* 55-4 (2003), pp. 468-475 (in Japanese).
- (22) F. Erdogan, and G. C. Sih, On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear, *Journal of Basic Engineering Transaction of the American Society of Mechanical Engineers*, Series D, Vol. 85, (1963), pp. 519.